

2^ο Επαναληπτικό Τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η παράγωγος της f αλλάζει πρόσημο σε μια περιοχή του x_0 .
- Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$ έχει τοπικό ελάχιστο στο 1.
- Το σύνολο $A = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
- Υπάρχει συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{Z}$.
- Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $1-1$ και παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 , τότε και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^5 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (Με τον ορισμό)
- f είναι $1-1$ και επί.
- f^{-1} συνεχής συνάρτηση.
- αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} (g^5(x) + g(x)) = l \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

Θέμα 3

- Έστω $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ η οποία έχει παραγώγους έως και τρίτης τάξης. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(0, 1)$, τότε η τρίτη παράγωγος f''' έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.
- Έστω $f: (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με την f' να είναι φραγμένη. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 1$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^a} = 0$.

Θέμα 4

- Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$ και $f(1/2)$.

- Να βρείτε (αν και όπου υπάρχει) την παράγωγο της f και εξετάστε αν είναι φραγμένη.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!